$$= -\frac{(-1).(-1)^n . t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$= \frac{(-1)^n . t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \boxed{(-1)^n . \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}$$

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

b-)En intégrant l'égalité précédente montrer que ∀n de IN; $v_n - I = (-1)^n u_n$ où $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

On $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n . \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . t^{2k} \, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$= \int_0^1 (-1)^n . \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \int_0^1 t^{2k} \, dt - I = (-1)^n . U_n$$